Electrostatique

Oppérateur Nabla

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$\vec{\nabla} \cdot f = \overrightarrow{grad} f$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = div\ \vec{V}$

$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = rot\ \vec{V}$

Gradient

$\vec{E} = \overrightarrow{grad} V$

$E_x = \frac{\partial V}{\partial x}$, $E_y = \frac{\partial V}{\partial y}$, $E_z = \frac{\partial V}{\partial z}$

$E\rho = \frac{\partial V}{\partial \rho}$, $E_\theta = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta}$, $E_z = \frac{\partial V}{\partial z}$

$E_r = \frac{\partial V}{\partial r}$, $E_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}$, $E_\theta = \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial V}{\partial \theta}$

$div\ \vec{A}$

$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial(\sin\varphi A_\varphi)}{\partial \varphi}$

$div(\overrightarrow{rot}\ \vec{A}) = 0$

$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\ V) = 0$

$div(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{B}$

Circulation normale $\mathcal{C}$

$\mathcal{C}_{AB} = \int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{OM}$ (Travail)

Circulation gradien $\mathcal{C}$

$\int_1^B \overrightarrow{grad} f \cdot d\vec{OM} = f(B) - f(A) = \mathcal{C}_{AB}$

différence de potentiel

Flux de vecteur ϕ

$\phi = \iint_{(S)} \vec{V} \cdot \vec{N} \cdot ds$ (S) ouvert

- si (S) fermé (C) ! $\exists$ est $\vec{n}$ int → ext

$\phi = \iiint_T div\ \vec{V} \cdot d\tau$

Green-ostrogradsky

⚠ circulation d'un vecteur $\mathcal{C}$

$\mathcal{C}_{AB} = \int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{OM} = \iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\vec{V} \cdot d\vec{s}$

stocke

Angle solide Ω

$\Omega = \iint_S \frac{\cos(\vec{N}, \vec{e_r})}{r^2} \cdot ds$

formulation Intégrale

$\iiint_T \overrightarrow{grad} f \cdot d\tau = \iint_{(S)} f \cdot d\vec{s}$

$\iiint_T \overrightarrow{rot}\,\vec{A} \cdot d\tau = \iint_{(S)} d\vec{s} \wedge \vec{A}$

Loi de coulomb

$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \cdot \vec{u}_1(\vec{r}_2)$

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ SI

Principe de superposition

$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i \vec{u}_i \vec{r}}{|r_i - r|^2}$

Distribution $\vec{F}$

Linéique $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda \cdot dl}{r^2}\vec{u}_{MM'}$

surfacique $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma \cdot ds}{r^2} \cdot \vec{u}_{MM'}$

Volumique $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_T \frac{\rho \cdot d\tau}{r^2} \cdot \vec{u}_{M/M'}$

$\lambda = \frac{dq}{dl}$ | $\sigma = \frac{dq}{ds}$ | $\rho = \frac{dA}{d\tau}$

Scanned by CamScanner

Champ électrostatique

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot \vec{u}_r$ Volt/mètre

Cas d'une distribution

$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum \frac{q_i \vec{u}_i}{r_i^2}$

$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}$

Ligne de champ

$\vec{E} \wedge d\vec{l} = \vec{0}$

$q+ \rightarrow q-$

L'intensité du champ ∝ à la densité des ligne de champ

ne se coupe jamais sauf si $\vec{E} = \vec{0}$ ou non-défini

$\vec{E} \perp$ surface équipotentiel

Symétrie du champe

si la distribution de charge possède des propriété de symétrie par rapport à un point, un axe ou un plan, le champ $\vec{E}$ créé par cette distribution aura les même propriété de symétrie

elle permet de déterminer la direction du champ $\vec{E}$ (suppression de composante)

Symétrie plane

si (D) admet un plan de symétrie (P) (passant par M)

$\vec{E}$ est contenu dans le plan de symétrie

Anti-symetrie plane

si D admet un plan d'Anti-Symétrie

$\vec{E}$ est $\perp$ au plan d'Antisymétrie (P)

Symetrie Axiale

si (D) possède deux plans de symetrie

l'intersection de ces plan est un axe de symétrie $\vec{E}$ est sur cette axe

Symétrie sphérique

si D possède plusieur plan de symétrie l'intersection est un axe de symétrie

Invariance d'un champ

L'étude des invariance renseigne sur les variable dont dépendant les composantes de $\vec{E}$ (suppression des variable)

Invariance par translation

si D ne change pas de symétrie par translation par rapport à un axe alors D ne dépend pas de cette axe

Ex: distribution infinie (fil, cilyndre, plan)

Invariance par rotation

si D ne change pas de symétrie par rapport rotation par rapport à un angle φ alor D ne dépend pas de cette angle φ.

Ex (spire, disque, cylindre)

FLux du champ $\vec{E}$

Ouvert

$\phi(E/S) = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \iint \frac{\vec{e_r} \cdot d\vec{s}}{r^2}$

$\phi(\vec{E}/S) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{ds \cos\alpha}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \iint_S d\Omega$

fermé

extérieur

$\phi_{(\vec{E}/S)} = 0$: ~~$d\phi = d\phi_1 + d\phi_2$~~

$d\phi = \vec{E}(r_1) \cdot d\vec{s_1} + \vec{E}_{r_2} \cdot d\vec{s_2} = \frac{q_{ext}}{4\pi\varepsilon_0} (d\Omega_1 + d\Omega_2)$

$\rightarrow d\Omega_{1\,ext} = -d\Omega_{2\,int} \rightarrow d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 = 0$

intérieur

$\phi_{\vec{E}/S} = \frac{q_{int}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \iint \Omega(\text{espace}) = \frac{q_{int}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$

sur surface

$\phi_{E/S} = \frac{q_{int}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \Omega(\text{demi espace}) = \frac{q_{int}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 2\pi = \frac{q_{int}}{2\varepsilon_0}$

Scanned by CamScanner

Théorème de Gauss

$$\Phi_{\vec{E}/S} = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad / Q_{int} = \sum q_i$$

$ds \Rightarrow$ surface de Gauss

$\vec{ds}$: intérieur $\rightarrow$ extérieur

$\Rightarrow$ forme intégrale

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \iiint_V \operatorname{div}\vec{E}\cdot dv \quad \text{(Green-Ostrogradsky)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{E}(M) = \frac{\rho(M)\cdot dv}{\varepsilon_0 \cdot ds} = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$$

$\Rightarrow$ forme local

⚠ si $\vec{E} \perp \vec{ds} \Rightarrow \Phi_{\vec{E}/S} = 0$

si $\vec{E} \not\perp \vec{ds} \Rightarrow \Phi_{\vec{E}/S} = \iint_S E\,ds$

si $E = cte \Rightarrow \Phi_{E/S} = E\cdot S$

Exemple fil rectiligne chargé infini

$AM = a$

symétrie cylindrique $\vec{E} = E_\rho(\rho)\vec{e_\rho}$

surface de Gauss : surface du cylindre d'axe Δ de rayon a et de hauteur h

$$\oiint_{SG} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \iint_{S_{b1}} \vec{E}\,d\vec{s} + \iint_{S_{b2}} \vec{E}\,ds + \iint_{S_{lat}} ds$$

sur (S_{basc}) $\vec{E} \perp d\vec{s} \Rightarrow \Phi_{\vec{E}/S_b} = 0$

sur (S_{lat}) $\vec{E} \parallel d\vec{s} \Rightarrow \Phi_{E/S_{lat}} = \iint_{S_{lat}} E\,ds$

$E_\rho(\rho) = cte$ sur S_{lat} du cylindre

$$\Phi(E/S_{lat}) = E_\rho(\rho)\iint_{S_{lat}} ds = E_\rho(\rho)\cdot S_{lat} = 2\pi\rho h\cdot E_\rho$$

$$= \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_\rho(\rho) = \frac{Q_{int}}{2\pi\varepsilon_0\rho h}$$

$$Q_{int} = \int_{Cyl} dq_{int} = \lambda\cdot h \Rightarrow \vec{E}_M = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\cdot\vec{e_\rho}$$

Exemple Plan infini chargé

Symétrie : tout axe $\perp (P)$ est un axe de symétrie

invariance par translation suivant Ox, oy

surface de Gauss : cylindre d'axe oz de hauteur h et rayon r

$$\Phi_{E/S_G} = \oiint_{S_G} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} = \iint_{S_{lat}} \vec{E}\,d\vec{s} + \iint_{S_{b1}} \vec{E}\cdot ds + \iint_{S_{b2}} \vec{E}\cdot ds$$

sur (S_b) : $\vec{E} \parallel d\vec{s} \Rightarrow \Phi_{E/S_b} = \iint_{S_{b1}} E_z(z)\,ds + \iint_{S_{b2}} E_z(-z)\,ds$

$$\Phi_{E/S_b} = 2 S_b E(z)$$

sur (S_{Lat}) $E \perp ds \Rightarrow \Phi_{E/S_{lat}} = 0$

$$\frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\cdot S_b}{\varepsilon_0} = 2 S_b E(z)$$

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}$$

Exemple sphère chargée en volume

$OM = r$ rayon $= R$

symétrie sphérique $\vec{E} = E(r)\vec{e_r}$

surface de Gauss : sphère $S(O, r)$

$$\Phi_{E/S_G} = \oiint_{SG} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{q(r)}{\varepsilon_0}$$

$$= E(r)\cdot S_G = E_r\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

si $r > R$ $Q_{int} = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$

$$E_r = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

si $r < R$ $Q_{int} = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$

$$E_r = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

si $r = R$: continuité de $E(r)$

$$\Rightarrow E(R) = \frac{\rho\cdot R}{3\varepsilon_0}$$

Potentiel électrostatique

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r} + cte$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V(M))$$

Scanned by CamScanner

distribution

$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum \frac{q_i}{r_i} + C^{te}$

linéique $V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_L \frac{\lambda \cdot dl}{r} + cte$

surfacique $V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \iint_S \frac{\sigma \cdot ds}{r} + cte$

volumique $V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \iiint_V \frac{\rho \cdot \tau}{r} + cte$

potentiel et circulation

$\int \vec{E} \cdot d\vec{OM'} = \int_M^{M'} -\overrightarrow{grad}(V(M)) \vec{dl} = V_M - V_{M'}$

Surface équipotentiel $V(M) = V_0 = cte$

surface fermé, entour les charge

sur une équip. $dV = \overrightarrow{grad} V \cdot \vec{dl} = -\vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$

$\Rightarrow \vec{E} \perp \vec{dl}$

$\vec{E}$ orienté vers les potentiel décroissant

forme local du théorème de Gauss

$div\ \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$

forme local du potentiel

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V = -\vec{\nabla} V$

$div(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} V) = -\Delta V = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$

$div(\vec{E}(M)) + \Delta V = 0 \rightarrow \Delta V = \frac{-\rho_M}{\varepsilon_0}$

équation poisson

point sans charge $\Delta V = 0$

equation de laplace

avec $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

Dipôle électrostatique

doublet pour lequel $NP = 2a \ll r = OM$

Moment dipolaire $\vec{p} = q\overrightarrow{NP} = q \cdot 2a \cdot \vec{u}_{NP}$

Potentiel du dipôle

$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM}\right)$

$r \gg 2a$

$PM = r - a\cos\theta$, $NM = r + a\cos\theta$

$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{1}{1 - \frac{a}{r}\cos\theta} - \frac{1}{1 + \frac{a}{r}\cos\theta}\right)$

dev. Lin $\frac{1}{1+x} = 1 - x$ $x \ll 1$

$V(M) = \frac{2aq\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e_r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\, V(M) = E_r(r,\theta)\vec{e_r} + E_\theta(r,\theta)\vec{e_\theta}$

$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}\cos\theta$, $E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\sin\theta$

Action d'un champ ~~dans~~ sur un dipôle

Moment $\vec{\Gamma} = \vec{ON} \wedge (-q\vec{E}) + \vec{OP} \wedge q\vec{E}$

$= q\vec{NP} \wedge \vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E} = pE\sin\alpha\vec{k}$

sans contraint l'équilibre correspond

$\vec{\Gamma} = \vec{0}$ $\begin{cases} \alpha = 0 & \text{stable} \\ \alpha = \pi & \text{instable} \end{cases}$

la principale action d'un champ $\vec{E}$ uniforme sur un dipôle est la tendence à l'orientation suivant une ligne de champ ($\vec{p}$ s'aligne avec $\vec{E}$)

si le dipôle peut tourner, il s'aligne selon E, si il ne tourne pas, il ne se passe rien

Conducteur en équilibre

un conducteur est en équilibre électrostatique lorsque aucune charge électrique ne se déplace à l'intérieur de celui-ci

A l'intérieur d'un conducteur en équilibre le champ est null

$\vec{F} = q\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_{int} = \vec{0}$

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V = \vec{0} \rightarrow V_{int} = cst = V_{surf}$ | equipotentiel

$div\ \vec{E}_{int} = \frac{\rho_{int}}{\varepsilon_0} = 0 \rightarrow \rho_{int} = 0$ densité volumique null

répartition surfacique

Ligne de champ $\perp$ surface du conducteur

Scanned by CamScanner

...cteur creux à l'équilibre
pas de charge dans la cavité
le cond a deux surfaces S_{int} et S_{ext}
$\vec{E}_{int} = \vec{0}$ et $V = cst$
$\Rightarrow V_{sint} = V_{cav} = V = cst \rightarrow E_{cav} = -\overrightarrow{grad} V_{cav} = \vec{0}$

$$\oiint_{SG} \vec{E}\,d\vec{s} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0 \quad (\vec{E}_{int} = \vec{0}) \Rightarrow \sum Q_{int} = 0$$

A l'équilibre, un conducteur creux et vide de charge se comporte de la même façon qu'un conducteur plein
$\vec{E}_{int} = \vec{E}_{cav} = \vec{0}$, $V = cst$ et $Q_{sint} = 0$

Théorème de colomb
le champ $\vec{E}$ au voisinage immédiate de la surface d'un conducteur de densité σ est $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$

Pouvoir de point Région du conducteur de très faible rayon de courbure et de champ électrostatique intense

Capacité d'un conducteur isolé
$Q = \oiint_S \sigma \cdot ds$, $V = V_{int} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\sigma ds}{r}$

$$C = \frac{Q}{V}$$

⚠ lorsqu'on relie un conducteur chargé à la terre devient ≈ 0 ses charges s'écoulent vers la terre et son potentiel vaut 0

Influence électrostatique
→ polarisation du conducteur métalique ($Q = 0$)
$\vec{E}_{int} + \vec{E}_{ext} = \vec{0}$
⇒ densité de charge surfacique
→ perturbation local du champ

Influence parciel
A chargé + B isolé neutre → polarisation B
$\vec{E}_{int_B} = \vec{0}$, $Q_B = 0$ potenciel modifié
→ influence réciproque sur B
densité de charge modifié, pas de ligne arrivé
• si $V_A > V_B$
on appelle élément correspondants deux surface S_A et S_B relié par un tube de champ
les deux charge porté par deux élément correspondant sont opposé $q_A = -q_B$

In fluence total
. tout les ligne de A arrive sur B
⇒ le conducteur A entouré de B
⇒ B à S_{Bint} et S_{Bext}
Si A et B isolé ($Q_A = 0$, $Q_B > 0$)
⇒ conducteur creux avec cavité sans charge
⇒ Q_B se répartie sur S_{Bext}
⇒ $Q_{Bext} = Q_B$, $Q_{Bint} = 0 = Q_A$
⇒ rien changé à l'intérieur ⇒ écran électrostatique
Si A et B isolé ($Q_A > 0$, $Q_B = 0$)
tout les ligne de champ de A arrive sur S_{Bint}
• Elém. corres ⇒ $Q_{Bint} = -Q_A$
• conservation de neutralité $Q_{Bext} + Q_{Bint} = 0$
⇒ $Q_{Bext} = -Q_{Bint} = Q_A$
Si A et B isolé ($Q_A \neq 0$, $Q_B \neq 0$)
. Elém. corres ⇒ $Q_{Bint} = -Q_A$
. charge de B conservé $Q_{Bint} + Q_{Bext} = Q_B$
⇒ $Q_{Bext} = Q_B + Q_A$

⚠ à l'intérieur de A et B $\vec{E} = \vec{0}$ et $V = cst$ (équilibre)
entre A et B et l'extérieur de B $\vec{E} \neq \vec{0}$

Scanned by CamScanner

Coefficients d'influence d'un système de conducteur

$$Q_i = C_{i1} V_1 + C_{i2} V_2 + \dots + C_{in} V_n$$

Condensateur et capacité

Condensateur = système de deux conduct en influence électrostatique

les armatures sont séparé par un diélectrique ou le vides

• condensateur un flu ance totale

$$Q_{2\,int} = -Q_N$$

$$\Rightarrow Q_2 = Q_{2\,int} + Q_{2\,ext} = -Q_1 + Q_{ext}$$

condensateur sphérique

symétrie sphérique

$$\iint \vec{E}.\vec{ds} = E.4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$Q = Q_1$$

$$V_1 - V_2 = \int E(r)\,dv = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R_1 . R_2}{R_2 - R_1}\right)$$

condensateur cylindrique

$$\phi = \iint \vec{E}.\vec{ds} = E(r) . 2\pi r . h = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r h}$$

$$V_1 - V_2 = \int_{A_1}^{A_2} E(r)\,dv = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q\,dv}{4\pi\varepsilon_0 r h} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln(R_2/R_1)}$$

condensateur plan $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \varepsilon_0 \frac{S}{e} \qquad = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} i + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} i = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} i$$

$$V_1 - V_2 = \int_A^{A_2} \vec{E}.\vec{dr} = E\int_0^e dx = E.e = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \left(\ln\frac{R_2}{R_1}\right)^{-1}$$

Force électrostatique et force ext.

$$\vec{F} = q.\vec{E}$$

$$\vec{F_{ext}} = -\vec{F} = -q\vec{E}$$

Travail d'une force

$$dw = \vec{F}.\vec{dl} = q.\vec{E}.\vec{dl} = -q.\overrightarrow{grad}V.\vec{dl}$$

$$dw = -q.dV$$

Energie potentiel électrostatique

$$W_{ext} = -W = q.(V_B - V_A)$$

$$\Delta E_p = W_{ext} = q(V_B - V_A)$$

avec A reperé à l'infini il n'y pas de charge alor V_A est nul

$$E_p = q.V + cte$$

Energie d'un ensemble de charge

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i . V_i$$

distribution volumique

$$E_p = \frac{1}{2}\int V.dq = \frac{1}{2}\iiint_T \rho.V.dV$$

distribution surfacique

$$E_p = \frac{1}{2}\int V.dq = \frac{1}{2}\iint_S \sigma.V.ds$$

distribution linéique

$$E_p = \frac{1}{2}\int \lambda.V.dl$$

Energie d'un conducteur seul dans l'espace

$$E_p = \frac{1}{2}Q.V = \frac{1}{2}.C.V^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Energie d'un condensateur

$$E_p = \frac{1}{2}Q(V_1 - V_2)$$

localisation de l'énergie (cond. plan)

$V_1 - V_2 = E.e$ / e distans entre armature

$$C = \frac{\varepsilon_0 . S}{e} \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{e}.E^2 e^2$$

Volume $S.e \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}E^2\varepsilon_0 . V$

densité volumique de l'énergie $= \omega.V$

Scanned by CamScanner

Electrocinétique

Définition

les charge sont somise à les forces

- Force électrique $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$
- Force de frottement $\vec{f} = -\lambda \cdot \vec{v}$

alors $\vec{F} + \vec{f} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = \frac{q}{\lambda}\vec{E} = k \cdot \vec{E}$

$k = \frac{q}{\lambda}$ mobilité de charge

on caractérise localement le courant électrique au moyen du vecteur courant qui est défini en un point M et à l'instant t par : $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v} = \rho \cdot k \cdot \vec{E}$

$\vec{j}$ densité du courant électrique

Ligne et tube de courant

Les lignes tangentes en chacun de leur points au vecteur courant en ce point s'appellent ligne de courant, ce sont les trajectoires des charges

on peut définir aussi des tubes de courant constitué par l'ensemble des Lignes de courant qui s'appuient sur le contour d'une surface S

Intensité du courant

$dI = \vec{j} \cdot d\vec{s} = \frac{dq}{dt} = \rho \cdot v \cdot ds$

Relation entre le vecteur courant et le champ électrique

$\vec{j} = \rho \frac{q}{\lambda} \cdot \vec{E} = \rho \cdot \vec{v} = \gamma \cdot \vec{E} \quad / \vec{v} = \frac{q}{\lambda} \cdot \vec{E}$

γ conductivité $= \frac{1}{\rho}$

ρ = résistivité loi locale de OHm

ρ conductivité $\neq$ ρ densité volumique

$\gamma_{isolan} = 0$, $\gamma_{supra\,conduct}$ très grand

Loi d'OHm dans le cas d'un conducteur ohmique cylindrique

$U = E.l$, $I = \gamma S$, $\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$

$\Rightarrow U = \frac{j}{\gamma} \cdot l$

$\Leftrightarrow U = \frac{I}{\gamma \cdot S} \cdot l = R \cdot I$ (loi de OHm)

$R = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{l}{S} = \rho \cdot \frac{l}{S}$ (Résistance)

unité Ω ($1\Omega = 1.V.A^{-1}$)

$G = \frac{1}{R}$ conductance Ω^{-1}

Si S est variable $R = \rho \cdot \int \frac{dl}{S}$

association de conducteur ohmique

Association en série

$R = \sum_{i=1}^{n} R_i$ (Même courant d'intensité)

Association parallèle

$R = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$ (loi de nœuds $I = \sum_{i=1}^{n} I_i$)

puissance électrostatique

$P = \frac{W}{t} = \frac{q \cdot (V_A - V_B)}{t} = I \cdot (V_A - V_B)$

l'effet de Joule

$P = R \cdot I^2$, $W = R \cdot I^2 \cdot t$

forme calorifique

Scanned by CamScanner

étude d'un générateur

$V_p - V_n = E - r.I$ (loi de OHM pour générateur)

$W_G = q(V_p - V_n) = q(E - rI)$

$W_G = E.I.t - r.I^2.t$ (Energie)

$P_G = E.I - r.I^2$ (puissance)

$\rho = \frac{W_G}{E_G} = \frac{E.I.t - rI^2t}{EIt} = 1 - \frac{rI}{E}$ (rendement)

Association en série

$E_{éq} = \sum_{i=1}^{n} E_i$, $r_{éq} = \sum_{i=1}^{n} r_i$

Association en parallèle

$E_{éq}' = E$, $r_{éq}' = \frac{r}{n}$

étude d'un récepteur

$V_p - V_n = E' + r'I$ (loi de OHM pour récepteur)

$W_R = q(V_p - V_n) = q(E' + r'I)$

$W_R = E'.I.t + r'I^2t$ (énergie)

$P_R = \frac{W_R}{t} = E'.I + r'I^2$ (puissance)

$\rho = \frac{E_R}{W_R} = \frac{E'It}{E'It + r'I^2t} = \frac{E'}{E' + r'I} = \frac{1}{1 + \frac{r'I}{E'}}$

Loi de pouillet

$$I = \frac{\sum_{i=1}^{n} E_i + \sum_{i=1}^{n} E_i'}{\sum_{i=1}^{n} R_i}$$

charge / décharge d'un condensateur

charge RC $U_{AB} = V_A - V_B = E$ généré

$U_{AC} = V_A - V_C = R.i(t)$

$U_{CB} = V_C - V_B = \frac{q_c}{C} = \frac{q(t)}{C}$

$U_{AB} = U_{AC} + U_{CB}$

$E = R.\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C}$

$q(t) = E.C\left(1 - e^{\frac{-1}{RC}}\right)$

$I(t) = \frac{E}{R}\left(e^{-\frac{1}{RC}}\right)$

$U(t) = E\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}}\right)$

$W_C = \frac{1}{2} CE^2$

$W_G = q.E = CE^2$

$\tau = R.C$

t_m 10% → 90%

$t_m = \tau \ln 9 \approx 2{,}20\,\tau$

Décharge RC

$R\,q(t) + \frac{q(t)}{C} = 0$

$q(t) = ER\,e^{-\frac{1}{RC}}$

$i(t) = \frac{-E}{R} e^{-\frac{1}{RC}}$

$U(t) = E\,e^{-\frac{1}{RC}}$

$W_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} CE^2$ $t \to \infty$

Etude de Reseau électrique linéaire

Définition

Réseau linéair ensemble dipôle linéair avec un générateur minimum

Noeud point réseau où sont connecté plus de 2 dipôles

Branche partie de circuit située entre 2 noeud

Maille ensemble de Branche formant une boucle fermé

Scanned by CamScanner

de kirchhoff

Loi des nœuds

$\sum I_{entrant} = \sum I_{sortant}$ (n-1 équation)

Loi de maille

dans une Maille

$$\sum_k \pm R_k I_k + \sum_k \pm e_k + \sum_k \pm e'_k = 0$$

(m équation)

en résolution on obtient $m + (n-1)$ équation avec' $m + (n-1)$ inconnus

Le système d'équation peut s'écrire sous la forme $[R]\,(i) = (e)$

$[R]$ Matrice de résistance (b×b)

(i) Vecteur colonnes des intensité' (1×b)

(e) vecteur colonnes des fém et fcém (1×b)

solution $i_k = \dfrac{\det [R]_{ek}}{\det [R]}$

Si $I_k > 0$ sens réel de I_k = sens choisi inicialement

Si $I_k < 0$ sens réel de $I_k \neq$ sens choisi inicialement

- si la branche contien une branche non polarisé', on inverse le sens du courant et on refait tout les calcul (la polarité du récepteur dépend du sens du courant)
- si I_k est toujours < 0 problème

Methode de courant de Maille

réduction de nombre d'inconnue

choix des maille independant avec un sens

le parcour dans chaque maille

choix des courant des mailles et les calculer

calculer les branche I_k

Théorème de supperposition

Dans un réseau contenant plusieur générateur de tension ou de courant, l'intensité' du courant dans la branche est égale à la somme des intensité' dans cette branche dues à chaque générateur supposé seule (les autre éteinte)

→ Générateur de tension → cour circuit (Res. int)

→ Générateur de courant → circuit ouvert (Res. int)

Théorème de Thévenin

un réseau linéaire compris entre deux nœuds A et B aussi compliqué soit-il, est équivalent à un générateur unique appelée générateur de thévenin de f.é.m : U_0 et de Résistance interne : R_0 (résistance de Thevenin)

Calcul de U_0 et R_0

$U_0 = V_A - V_B$ = d.d.p mesuré' entre A et B à vide (lorsque $I = 0$) déconnecté

R_0 : résistance équivalante vue entre A et B en supposant que toutes les f.é.m contenus dans le réseau sont nulles en laissant leurs résistances internes)

le dipôle AB peut être passif (résistance) ou actif (contenant des générateur)

→ Dipôle AB passif: R_{AB}

Loi de pouillet : $(R_0 + R_{AB})\, I_{AB} = U_0$

→ dipôle AB actif

$(R_0 + R_{AB})\, I_{AB} = U_0 - E_1$

Scanned by CamScanner